

子群的共轭个数与群的结构*

刘晓蕾¹, 王燕鸣²

(1. 山西财经大学应用数学系, 山西 太原 030006;
2. 中山大学岭南学院//数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 利用子群的共轭类的数目, 研究了有限群。在较弱的条件下给出了有限群的可直分解性的几个刻画及有限可解群的超可解性与素数幂阶循环群的共轭个数之间的一个关系。

关键词: 有限群; 可直分解群; 超可解群

中图分类号: O152 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 06-0005-03

本文中 G 总是表示有限群, p 指素数, π 指素数集, $O_\pi(G)$ 指 G 的最大正规 π -子群。对一个有限群 G , 所谓 G 是 π -可直分解的, 是指 $G = O_\pi(G) \times O_{\pi'}(G)$ 。

关于群的共轭类的数量性质和群结构的关系, 已经得到广泛而深入的研究^[1-2]。众所周知, 对于群 G 的任意一个元素 x , G 的含 x 的共轭类长是 $|G:C_G(x)|$ 。自然地, 我们也可以考虑类似的问题, 即 G 的共轭的循环子群 $\langle x \rangle$ 的个数 $|G:N_G(\langle x \rangle)|$ 与该群结构的关系。容易证明, G 幂零的充要条件是对每一个 $p \in \pi(G)$ 及 G 的每一个 p -元 x , $|G:N_G(\langle x \rangle)|$ 是 p 的幂。Zhou^[3] 证明了: 对于给定的有限群 G 及素数 p , 如果对 G 的任意元 x , $|G:N_G(\langle x \rangle)|$ 与 p 互素, 那么 G 是 p -幂零的。但仍只有很少的作者进行这方面的研究。本文在这个方向做了探讨, 具体地说, 就是利用共轭的循环子群 $\langle x \rangle$ 的个数讨论有限群的直积分解, 得到了一些有意义的结果。

1 结果与证明

引理 1^[3, Lemma 1] 设 N 是 G 的一个正规子群, $x \in N$, $y \in G$ 。那么 $|N:N_N(\langle x \rangle)| \mid |G:N_G(\langle x \rangle)|$; $|G/N:N_{G/N}(\langle y \rangle N/N)| \mid |G:N_G(\langle y \rangle)|$ 。

定理 1 设 $p \in \pi(G)$, 且对任意 $q \in \pi(G)$, p 不整除 $q-1$ 。那么 G 是 p -直分解的充要条件是, 对任意 p' -元 x , p 不整除 $|G:N_G(\langle x \rangle)|$ 。

证明 显然只须证明充分性。首先证明若 $P \in \text{Syl}_p(G)$, 那么 P 正规于 G 。

令 $K = PC_G(P)$ 。若 $K = G$, 则 P 正规于 G 。设

$K < G$ 且 $x \in G$ 。易证 x 被唯一地分解为 $x = x_1 x_2$, 其中 x_1 是 p -元, 而 x_2 是 p' -元。显然 $x_1 \in C_G(x_2)$ 。另一方面, 由假设, 存在一个元 $g \in G$ 使得 $P^g \leq N_G(\langle x_2 \rangle)$ 。令 $H = P^g \langle x_2 \rangle$ 。取 $q \in \pi(\langle x_2 \rangle)$ 及 $Q \in \text{Syl}_q(\langle x_2 \rangle)$ 。则 $Q \in \text{Syl}_q(\langle x_2 \rangle P^g)$ 。我们有 $N_H(Q)/C_H(Q)$ 同构于 $\text{Aut}(Q)$ 的一个子群。因 Q 循环而 p 不整除 $q-1$, 故 $N_H(Q) = C_H(Q)$ 。因此由 Burnside 定理 [4, IV, 2.6] 知, 对于每一个 $q \in \pi(\langle x_2 \rangle)$, $\langle x_2 \rangle P^g$ 是 q -幂零的。这样 P^g 在 $\langle x_2 \rangle P^g$ 中正规。进而 $H = P^g \times \langle x_2 \rangle$ 。也有 $P^g \leq C_G(\langle x_2 \rangle)$, 即 $x_2 \in C_G(P^g)$ 。由 Sylow 定理, 存在 $z \in C_G(x_2)$ 使得 $x_1^z \in P^g$ 。于是 $x^z = x_1^z x_2^z = x_1^z x_2 \in P^g C_G(P^g)$, 即 $x \in K^{G^{z^{-1}}}$, 且 $G = \bigcup_{g \in G} K^g$ 。因而 $G = K$, 矛盾。这表明 P 在 G 中正规。由 Schur-Zassenhaus 定理 [5, p253], 存在一个 Hall p' -子群 H , 使得 $G = PH$ 。取 y 是 H 中任意元。 y 当然是 p' -元。由假设, $p \nmid |G:N_G(\langle y \rangle)|$ 。因此 $p \nmid |N_G(H)|$ 。这表明 $G = P \times H$ 。

注 1 条件“对每一个 $q \in \pi(G)$, p 不整除 $q-1$ ”不能取消。否则, S_3 是一个反例。

引理 2 (与 Wielandt 引理^[6-7] 比较) 设 A 是 G 的一个 p -子群。若 $|G:N_G(A)|$ 是 p 的幂, 那么 $A \leq O_p(G)$ 。

证明 设 $P \in \text{Syl}_p(G)$, 使得 $A \leq P$ 。因 $|G:N_G(A)|$ 是 p 的幂, 故 $G = N_G(A)P$ 。于是, 正规子群 $\langle A^G \rangle = \langle A^P \rangle \leq P$ 。故 $A \leq O_p(G)$ 。

定理 2 (与 [8] 定理的条件比较) 设 $p \in \pi(G)$ 满足: 若 $q \in \pi(G)$, 则 q 不整除 $p-1$ 。那么

* 收稿日期: 2008-05-21

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10571181)

作者简介: 刘晓蕾 (1963 年生), 男, 副教授; E-mail: lxlljh@163.com

G 是 p -可分解的且 $O_p(G)$ 是 Hamilton 群的充要条件是共轭的素数幂阶循环子群的个数是 p 的幂。特别地, 当条件成立时, G 幂零。

证明 显然只须证明充分性。

对 $|G|$ 用归纳法。设 $P \in \text{Syl}_p(G)$, $x \in P$ 。由引理 2, $\langle x \rangle \leq O_p(G)$ 。于是, P 在 G 中正规, 即 $P = O_p(G)$ 。由 Schur-Zassenhaus 定理, G 中存在 p' -Hall-子群 H , 于是 $G = O_p(G)H$, 且 H 显然是 Hamilton 群。还须证明 H 正规于 G 。假定 K, M 是 H 的不同的极大子群。由于 H 是 Hamilton 群, 易知 $O_p(G)K, O_p(G)M$ 是 G 的正规子群。由归纳得, $O_p(G)K = O_p(G) \times K, O_p(G)M = O_p(G) \times M$ 。因而 $O_p(G) \leq N_G(\langle K, M \rangle) = N_G(H)$ 且 H 正规于 G 。设 H 有唯一的极大子群 K , 那么 H 是素数幂阶循环子群。设 H 的阶是 q^α , 那么 q 不等于 p 。取 x 是 $Z(O_p(G))$ 中 p 阶元。因为一方面, 由假设, $|G:N_G(\langle x \rangle)|$ 是 p 的幂; 另一方面, 注意到 $x \in Z(O_p(G))$, $|G:N_G(\langle x \rangle)|$ 不被 p 整除, 故 $\langle x \rangle$ 正规于 G 。设 $\langle x \rangle$ 是 $O_p(G)$ 的一个子群。由归纳得, $G/\langle x \rangle = O_p(G/\langle x \rangle) \times O_{p'}(G/\langle x \rangle)$ 。令 $O_p(G/\langle x \rangle) = L/\langle x \rangle$ 。显然 L 正规于 G 。由归纳得, $L = O_p(L) \times O_{p'}(L)$ 。故 $O_{p'}(L)$ 正规于 G 。显然 $H = O_{p'}(L)$ 。若 $O_p(G) = \langle x \rangle$, 那么 G 的阶是 pq^α , 因而 H 是 G 的 q -Sylow 子群。但因 q 不整除 $p-1$, 由 Sylow 定理, H 是 G 的唯一的 q -Sylow 子群, 因而 H 正规于 G 。

注 2 条件“ q 不整除 $p-1$ ”不能被取消, 否则 S_3 是一个反例。

定理 3 设 $p \in \pi(G)$ 使得: 如果 q (不等于 p) $\in \pi(G)$, 那么 G 与 S_{pq} 无涉, 这里 $|S_{pq}| = pq$ 且 S_{pq} 的 Sylow q -子群不正规于 S_{pq} 。如果共轭的素数幂阶循环子群的个数是 p 的幂, 那么 $G = O_p(G) \times O_{p'}(G)$ 且 $O_{p'}(G)$ 是 Hamiltonian 群。

证明 仿定理 2, $G = O_p(G)H$, 这里 H 是 G 的 p' -子群, 且是 Hamiltonian 循环群。还有 $|G| = pq^\alpha$ 。取 $K/O_p(G)$ 是 $G/O_p(G)$ 的 q 阶子群, 根据 Schur-Zassenhaus 定理, 可令 $K = O_p(G)K_1$, 其中 $|K_1| = q$, 于是 K 在 G 中正规。由假设, $K = O_p(G) \times K_1$ 。这意味着 $K_1 \text{ char } K$ 且 K_1 正规于 G 。类似地, 考察 G/K , 那么 K_2 在 G 中正规, 其中 K_2 是 H 的 q^2 阶子群。重复这种方法, 得 $K_{\alpha-1}$ 在 G 中正规。考察 $G/K_{\alpha-1}$ 。当然 $|G/K_{\alpha-1}| = pq$ 。由假设, $H/K_{\alpha-1}$ 在 $G/K_{\alpha-1}$ 中正规。因而 H 在 G 中正规。

定理 4 设 $p \in \pi(G)$ 使得对每个 $q \in \pi(G)$, p 不整除 $q-1$ 。那么 G 是 p -可分解的充要条件是对每个素数幂阶的 p' -元 x , p 不整除 $|G:N_G(\langle x \rangle)|$ 。

证明 只证充分性。

首先证明, 如果 $P \in \text{Syl}_p(G)$, 则 P 正规于 G 。令 $K = PC_G(P)$ 。若 $K = G$, 当然 P 正规于 G 。现设 K 是 G 的真子群。以 Ω 表 G 的右陪集全体。则 $|\Omega| > 1$ 。考察 G 在 Ω 上的自然作用。由 [9, Theorem], 存在一个素数 r 及一个 r -元 $g \in G$, 使得 g 无不动点的作用在 Ω 上。这样对 G 的任意元 x , Kxg 不等于 Kx , 即 g 不含于 K^x 。另一方面, 因 p 不整除 $|G:N_G(\langle g \rangle)|$, 存在 $a \in G$ 使得 $P^a \leq N_G(\langle g \rangle)$ 。令 $H = P^a \langle g \rangle$ 。若 $r = p$, 显然 $P^a \langle g \rangle \in \text{Syl}_p(G)$ 且 $P^a \langle g \rangle = P^g$, 从而 $g \in P^a \leq K^a$, 矛盾。设 r 不等于 p 。注意到 p 不整除 $r-1$, 而 $|N_H(\langle g \rangle)/C_H(\langle g \rangle)| \mid |\text{Aut}(\langle g \rangle)| = r^{\beta-1}(r-1)$, 其中 $|\langle g \rangle| = r^\beta$, 那么 $N_H(\langle g \rangle)/C_H(\langle g \rangle) = 1$ 。因此, 由 Burnside 定理及 $P^a \langle g \rangle = P^a \times \langle g \rangle$, H 是 r -幂零的。由于 $|G:C_G(g)| = |G:N_G(\langle g \rangle)| \mid |N_G(\langle g \rangle):C_G(g)|$, p 不整除 $|G:C_G(g)|$ 。因 $C_G(g)$ 在 $N_G(\langle g \rangle)$ 中正规, 这表明 $P^a \leq C_G(g)$ 。故 $g \in C_G(P^a) \leq K^a$, 矛盾。这证明了 $|\Omega| = 1$, 从而, P 在 G 中正规。

据 Schur-Zassenhaus 定理, G 有 p -补 S 。设 x 是 S 中素数幂阶元。仿上面方法, 可得 $P \langle x \rangle = P \times \langle x \rangle$, 这表明 P 正规化 $\langle x \rangle$ 。注意到 S 可由素数幂阶元生成, 我们知 P 正规化 S 。

注 3 条件“ p 不整除 $q-1$ ”不能被取消, 否则 S_3 是一个反例。

定理 5 (与 [10, 定理 10] 比较) 设 G 是有限可解群。若对 G 中每个素数幂阶元 x , $|G:N_G(\langle x \rangle)|$ 无平方因子, 则 G 超可解, 且 G 的导长不大于 4, 即 $\text{dl}(G) \leq 4$ 。

证明 首先证明 G 超可解。

假设定理不真, 而 G 是个极小反例。由引理 1, 条件被商群保持。因超可解群形成饱和群系, 故 G 有唯一极小正规子群 N 且 $\Phi(G) = 1$ 。由于 G 可解, N 是初等交换的。进一步有 $N = C_G(N) = F(G)$ 。令 $|N| = p^\alpha$, 当然 $\alpha > 1$ 。注意到 G/N 超可解, 故如果设 L/N 是 G/N 的极小正规子群, 则 $|L/N| = q$ 是素数且 $q \neq p$ 。显然 L 正规于 G 。由 Schur-Zassenhaus 定理, L 有一个 p -补 S 且 S 是 q 阶。令 $S = \langle x \rangle$, $K \in \text{Syl}_p(N_G(\langle x \rangle))$ 。由假设和引理 1, $|L:N_L(\langle x \rangle)| = 1$ 或 p 。若 $|L:N_L(\langle x \rangle)| = 1$, 则 $L = \langle x \rangle \times N$ 。这表明 $\langle x \rangle$ 特征于 L , 因而正规于 G , 矛盾于 N 的唯一性。设 $|L:N_L(\langle x \rangle)| = p$, 那么 $K \cap N > 1$ 。取 $y (\neq 1) \in K \cap N$ 。特别地, $y \in N_G(\langle x \rangle) \cap N$ 。因 $G/N = N_{G/N}(L/N) = N_{G/N}(\langle x \rangle$

$N/N) = N_G(\langle x \rangle)N/N$, 故 $G = N_G(\langle x \rangle)N$ 。记 $H = N_G(\langle x \rangle) \cap N$ 。则 H 在 G 中正规。由 N 的极小性, $H=1$ 或 N 。若 $H=N$, 那么 $N \leq N_G(\langle x \rangle)$ 。因而 $G = N_G(\langle x \rangle)$, 即, $\langle x \rangle$ 在 G 中正规, 矛盾于 N 的唯一性。假设 $H=1$, 即 $N_G(\langle x \rangle) \cap N = 1$, 但这又矛盾于 $K \cap N > 1$ 。

现在仿 [3, Theorem2] 证明 $\text{dl}(G) \leq 4$ 。 G 超可解, 因而 $G \leq F(G)$ 。设 $P \in \text{Syl}_p(F(G))$ 。则 P 在 G 中正规。对每一个元 $x \in P$, $|P : N_P(\langle x \rangle)| = 1$ 或 p 。这表明 $P' \leq N_P(\langle x \rangle)$ 。另一方面, 因为 $N_P(\langle x \rangle)/C_P(x)$ 同构于交换群 $\text{Aut}(\langle x \rangle)$ 的一个子群, 故 $P' \leq C_P(x)$ 。因此 $P'' \leq Z(P)$, $P''' = 1$ 。注意到 $F(G)$ 的幂零性, 我们有 $F(G)''' = 1$, 因而 $G^{(4)} \leq F(G)''' = 1$, 即 $\text{dl}(G) \leq 4$ 。

参考文献:

- [1] REN Y C. On the length of p -regular classes and the p -structure of finite groups[J]. Algebra Colloq, 1995, 2 (1): 3-5.
- [2] BAER R. Group elements of prime power index[J]. Trans Amer Math Soc, 1953, 75:20-47.
- [3] ZHOU X Y. On the orders of conjugacy classes of cyclic subgroups[J]. Arch Math, 1995, 65: 210-215.
- [4] HUPPERT B. Endliche Gruppen I[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1967.
- [5] ROBINSON D J S. A Course in the Theory of Groups [M]. 2nd edition. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [6] CHILLAG D, HERZOG M. On the length of the conjugacy classes of finite groups[J]. J Algebra, 1990, 131: 110-125.
- [7] CAMINA A R, CAMINA R D. Implications of conjugacy class size[J]. J Group Theory, 1998, 1: 257-269.
- [8] COSSEY J, WANG Y. Remarks on the length of conjugacy classes of finite groups[J]. Comm Algebra, 1999, 27 (9): 4347-4353.
- [9] FEIN B, KANTOR W, SCHACHER. Relative brauer groups[J]. J Reine Angew Math, 1981, 325: 110-125.
- [10] LIU X L, WANG Y M, WEI H Q. Notes on the length of conjugacy classes of finite groups[J]. JPAA, 2005, 196: 111-117.

On Number of Conjugate Subgroups in Finite Groups

LIU Xiao-lei¹, WANG Yan-ming²

- (1. Department of Applied Mathematics, Shanxi University of Finance and Economics, Taiyuan 030006, China;
2. Lingnan College // School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Finite groups are investigated in terms of number of conjugate subgroups. Some characterizations of decomposable groups are obtained. Also the influence of the number of conjugate subgroups of prime power order on supersolubility of finite groups is investigated and a new condition is showed.

Key words: finite group; decomposable; supersoluble